A 55-A OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Deva, 5 aprilie 2004

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Să se determine funcţiile strict crescătoare $f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 100\}$ care au proprietatea că $x + y$ divide $xf(x) + yf(y)$ oricare ar fi numerele $x, y \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Subiectul 2. Pentru fiecare număr natural nenul n se notează cu $P(n)$ numărul funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu proprietatea că $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt întregi. Să se arate că

$$n < P(n) < n^2, \quad n \geq 4.$$

Subiectul 3. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC şi B', C' picioarele înălţimilor din B şi respectiv C. O dreaptă variabilă d dusă din H intersectează segmentele $[BC']$ şi $[CB']$ în M şi respectiv N. Perpendicularele în M şi N pe d intersectează BB' şi CC' în P şi respectiv Q. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[PQ]$.

Subiectul 4. Fie $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p \geq 2$, $q \geq 2$. Spunem că o mulţime X are proprietatea (S) dacă oricum am alege p submulţimi $B_i \subset X$, $i = \overline{1, p}$, nu neapărat distincte, fiecare cu câte q elemente, există o submulţime $Y \subset X$ cu p elemente, astfel încât intersecţia lui Y cu fiecare B_i, $i = \overline{1, p}$, are cel mult un element. Să se arate că:

a) pentru $p = 4$ şi $q = 3$, orice mulţime cu 9 elemente nu are proprietatea (S);

b) orice mulţime X cu $pq - q$ elemente nu are proprietatea (S);

c) orice mulţime X cu $pq - q + 1$ elemente are proprietatea (S).